COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 12 AOUT 1901.

PRÉSIDENCE DE M. FOUQUÉ.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Un critère pour reconnaître les points singuliers de la branche uniforme d'une fonction monogène.* Note de M. G. Mittag-Leffler.

« Désignons par $F(\alpha)$, $F^{(1)}(\alpha)$, ..., $F^{(\mu)}(\alpha)$, ..., une suite de constantes assujetties à la condition de Cauchy que la limite supérieure des valeurs limites

$$\left|\sqrt[\mu]{\frac{1}{\underline{|\mu}} F^{(\mu)}(\alpha)}\right|$$

soit une quantité finie ([1]). Désignons encore par A l'étoile principale de ces constantes ([2]).

» Dans ma troisième Note : *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène* ([3]), j'ai donné différentes expressions pour la branche $FA(x)$, qui ont toutes la propriété que l'étoile est pour elles une étoile de convergence, c'est-à-dire que l'expression que je donne est uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de A, mais toujours divergente pour chaque point à l'extérieur de A. La question de savoir comment ces expressions se comportent sur la frontière même de A reste, au contraire, à élucider. On sait pourtant que les différents points de cette frontière que j'ai nommés les sommets de A sont tous des points singuliers de la branche $FA(x)$.

» La recherche des singularités de la branche $FA(x)$ et l'étude des expressions que j'ai obtenues pour $FA(x)$ sur la frontière de A ont, par conséquent, le rapport le plus intime.

» Prenons l'expression suivante de $FA(x)$ qui se trouve dans ma troisième Note

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0} S_\alpha(x \mid \alpha),$$

$$S_\alpha(x \mid \alpha) = F(\alpha) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\alpha^{(\nu)}(x-a),$$

$$G_\alpha^{(\nu)}(x-a) = \frac{r^{\nu-1} h_{\nu-1}^{(1)}(\beta)}{1!\,(\nu-1)!} F^{(1)}(a) \frac{x-a}{H} + \frac{r^{\nu-2} h_{\nu-2}^{(2)}(\beta)}{2!\,(\nu-2)!} F^{(2)}(a) \left(\frac{x-a}{H}\right)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{r h_1^{(\nu-1)}(\beta)}{(\nu-1)!\,1!} F^{(\nu-1)}(a) \left(\frac{x-a}{H}\right) + \frac{1}{\nu!} F^{(\nu)}(a) \left(\frac{x-a}{H}\right)^\nu,$$

$$H = e^{\int_0^r \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right] \frac{du}{u}},$$

$$\beta = 1 - \alpha,$$
$$0 < \alpha \leq 1,$$
$$0 < r < 1,$$

α et r désignant des quantités positives ayant ce rapport entre elles

---

([1]) Voir *Acta math.*, t. XXIII, p. 43.

([2]) Voir, pour la définition de l'étoile principale, *Acta math.*, t. XXIII, p. 48, ainsi que t. XXIV, p. 200.

([3]) *Acta math.*, t. XXIV.

que $\lim_{\alpha=0} r = 1$, et $h^{(\mu)}_{\nu-\mu}(\beta) \left(\begin{matrix} \mu = 1, 2, \quad \ldots, \nu \\ \nu = 1, 2, 3, \ldots, \infty \end{matrix}\right)$ étant des polynomes en β à coefficients positifs définis par l'égalité

$$e^{m\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right]\frac{du}{u}} = 1 + \frac{h_1^{(m)}(\beta)}{\lfloor 1}u + \frac{h_2^{(m)}(\beta)}{\lfloor 2}u^2 + \ldots + \frac{h_\alpha^{(m)}(\beta)}{\lfloor \alpha}u^\alpha + \ldots.$$

» On voit immédiatement, en s'appuyant sur les mêmes considérations par lesquelles j'ai obtenu cette expression, non seulement que la branche fonctionnelle $\mathrm{FA}(x)$ embrasse le point x tant que, pour une valeur déterminée de α, l'inégalité ([1])

$$\limsup_{\nu=\infty} |\mathcal{G}_\alpha^{(\nu)}(x-a)| < 1$$

a lieu, mais encore que l'inégalité

$$\limsup_{\nu=\infty} |\mathcal{G}_\alpha^{(\nu)}(x-a)| < 1$$

aura toujours lieu pour des valeurs suffisamment petites de α tant que x appartient à $\mathrm{FA}(x)$.

» On peut donc énoncer le théorème suivant :

» *Désignons par ε et s deux quantités positives quelconques plus petites que un. La condition nécessaire et suffisante pour que le point x soit un sommet de l'étoile* A *est que l'inégalité*

$$\left| \frac{r^{\nu-1} h^{(1)}_{\nu-1}(\beta)}{\lfloor 1 \lfloor \nu-1} \mathrm{F}^{(1)}(a) \frac{x-a}{\mathrm{H}} + \frac{r^{\nu-2} h^{(2)}_{\nu-2}(\beta)}{\lfloor 2 \lfloor \nu-2} \mathrm{F}^{(2)}(a) \left(\frac{x-a}{\mathrm{H}}\right)^2 + \ldots + \frac{r h_1^{(\nu-1)}(\beta)}{\lfloor \nu-1 \lfloor 1} \mathrm{F}^{(\nu-1)}(a) \left(\frac{x-a}{\mathrm{H}}\right)^{\nu-1} + \frac{1}{\lfloor \nu} \mathrm{F}^{(\nu)}(a) \left(\frac{x-a}{\mathrm{H}}\right)^\nu \right| > (1-\varepsilon)^\nu$$

ait lieu indépendamment de α, si petit que l'on ait pris ε, pour une infinité de valeurs de ν, tandis que l'inégalité

$$\frac{r^{\nu-1} h^{(1)}_{\nu-1}(\beta)}{\lfloor 1 \lfloor \nu-1} \mathrm{F}^{(1)}(a) \frac{(x-a)(1-s)}{\mathrm{H}} + \frac{r^{\nu-2} h^{(2)}_{\nu-2}(\beta)}{\lfloor 2 \lfloor \nu-2} \mathrm{F}^{(2)}(a) \left[\frac{(x-a)(1-s)}{\mathrm{H}}\right]^2 + \ldots + \frac{r h_1^{(\nu-1)}(\beta)}{\lfloor \nu-1 \lfloor 1} \mathrm{F}^{(\nu-1)}(a) \left[\frac{(x-a)(1-s)}{\mathrm{H}}\right]^{\nu-1} + \frac{1}{\lfloor \nu} \mathrm{F}^{(\nu)}(a) \left[\frac{(x-a)(1-s)}{\mathrm{H}}\right]^\nu < (1-\varepsilon)^\nu,$$

([1]) Je désigne avec Cauchy par $\limsup_{n=\infty} u_n$ la limite supérieure des valeurs limites des u_n.

en prenant d'abord α *et puis* ε *suffisamment petits, ait toujours lieu pour des valeurs suffisamment grandes de* ν.

» Ce théorème, en élucidant comment l'expression

$$\lim_{\alpha=0} S_\alpha(x \mid a)$$

se comporte pour un sommet de A, donne en même temps un critère pour reconnaître un tel sommet. Je viens d'employer pour fonction génératrice ([1]) à l'expression $S_\alpha(x \mid a)$ la fonction

$$f(u \mid \alpha) = \frac{u}{v} e^{\int_v^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta - 1\right]\frac{du}{u}},$$

ayant la propriété essentielle que le point u qui correspond à $v = 1$ n'est pas un point singulier de $f(u \mid \alpha)$. En employant d'autres fonctions génératrices ayant cette même propriété, on obtient évidemment de nouveaux critères de formes différentes.

» Un critère d'une forme bien simple se présente si l'on choisit pour $f(u \mid \alpha)$ la fonction génératrice de M. Fredholm ([2])

$$f(u \mid \alpha) = \frac{\operatorname{Log}[1 - (1-\alpha)u]}{\operatorname{Log}\alpha}.$$

» Le critère devient alors :

» *Désignons par* Σ *et* S *deux quantités positives quelconques plus petites que un, et désignons par* $e_1^{(\nu)}, e_2^{(\nu)}, \ldots, e_{\nu-1}^{(\nu)}$ *des constantes définies par la formule*

$$\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+\nu-1) = \lambda^\nu + e_1^{(\nu)}\lambda^{\nu-1} + \ldots + e_{\nu-1}^{(\nu)}\lambda.$$

» *La condition nécessaire et suffisante pour que* x *soit un sommet de l'étoile* A *est que l'inégalité*

$$\left| e_{\nu-1}^{(\nu)} F^{(1)}(a)\frac{x-a}{\log\frac{1}{\alpha}} + \ldots + e_1^{(\nu)} F^{(\nu-1)}(a)\left(\frac{x-a}{\log\frac{1}{\alpha}}\right)^{\nu-1} + F^{(\nu)}(a)\left(\frac{x-a}{\log\frac{1}{\alpha}}\right)^{\nu}\right| > \underline{|\nu}\left(\frac{1-\varepsilon}{1-\alpha}\right)^{\nu}$$

ait lieu indépendamment de α, *si petit qu'on ait pris* ε *pour une infinité de va-*

([1]) *Acta math.*, t. XXIV, p. 219.

([2]) *Comptes rendus*, 25 mars 1901.

leurs de ν, tandis que l'inégalité

$$\left| e_{\nu-1}^{(\nu)} \mathrm{F}^{(1)}(a) \frac{(x-a)(1-s)}{\log\frac{1}{\alpha}} + \ldots + e_1^{(\nu)} \mathrm{F}^{(\nu-1)}(a) \left[\frac{(x-a)(1-s)}{\log\frac{1}{\alpha}} \right]^{\nu-1} + \mathrm{F}^{(\nu)}(a) \left[\frac{(x-a)(1-s)}{\log\frac{1}{\alpha}} \right]^{\nu} \right| < \underline{|\nu} \left(\frac{1-\varepsilon}{1-\alpha} \right)^{\nu},$$

en prenant d'abord α et puis ε suffisamment petits, ait toujours lieu pour des valeurs suffisamment grandes de ν.

» Je me réserve de revenir en une autre occasion sur les différentes applications qu'on peut faire de mes théorèmes. Mais je ne dois pas finir cet article sans rappeler que M. Hadamard a donné, dans sa Thèse, un critère pour reconnaître si un point situé sur la circonférence du cercle des convergences de la série de Taylor

$$\mathrm{F}(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}} \mathrm{F}^{(\nu)}(a)(x-\alpha)^{\nu}$$

est un point singulier ou non, et que ce critère a été modifié après, d'une manière fort intéressante, par M. Lindelöf [1]. »

CORRESPONDANCE.

MÉCANIQUE. — *Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoïde élastique soumis à des efforts donnés sur la frontière.* Note de MM. **Eugène** et **François Cosserat**, présentée par M. Appell.

« Les problèmes les plus simples, relatifs à la déformation infiniment petite d'un ellipsoïde élastique dont la surface a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

conduisent à résoudre la question suivante : déterminer une série de nombres k_i et de déplacements $(\mathrm{U}_i, \mathrm{V}_i, \mathrm{W}_i)$ qui leur sont associés, vérifiant à l'intérieur de l'ellipsoïde les équations

$$(1) \quad \Delta_2 \mathrm{U}_i + k_i \frac{\partial \theta_i}{\partial x} = 0, \qquad \Delta_2 \mathrm{V}_i + k_i \frac{\partial \theta_i}{\partial y} = 0, \qquad \Delta_2 \mathrm{W}_i + k_i \frac{\partial \theta_i}{\partial z} = 0,$$

---

[1] *Remarques sur un principe général de la théorie des fonctions analytiques* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXIV).

et à la frontière trois conditions telles que la suivante :

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} & h_1 U_i + h'_1 \Big[(k_i - 1)\frac{x}{a^2}\theta_i + 2\frac{x}{a^2}\frac{\partial U_i}{\partial x} \\ & \qquad + \frac{y}{b^2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x} + \frac{\partial U_i}{\partial y}\right) + \frac{z}{c^2}\left(\frac{\partial W_i}{\partial x} + \frac{\partial U_i}{\partial z}\right)\Big] = 0, \end{aligned} \right.$$

les h, h' étant des constantes données.

» Dans notre Note du 8 août 1898, nous avons déjà fait connaître que, dans le cas où les constantes h'_1, h'_2, h'_3 sont nulles, les fonctions U_i, V_i, W_i sont des polynomes entiers en x, y, z.

» *Il en est de même dans le cas général.*

» Si l'on exprime, en effet, que trois polynomes entiers U_i, V_i, W_i vérifient les équations (1) et les conditions à la frontière (2), on trouve, pour déterminer les coefficients de ces polynomes, un système d'équations linéaires et homogènes dont le nombre est égal à celui des coefficients; en annulant le déterminant de ce système, on a, pour déterminer le nombre k_i qui figure dans les équations (1) et (2), une équation algébrique entière; cette équation admet généralement la racine -1, comme on devait s'y attendre, et ses autres racines sont réelles et distinctes. On parvient facilement à cette conclusion qu'il existe un système de polynomes du premier degré, trois systèmes de polynomes du deuxième degré, cinq systèmes de polynomes du troisième degré, et, en général, $2n+1$ systèmes de polynomes de degré $n+1$ satisfaisant aux conditions indiquées plus haut et correspondant à des nombres k_i différents de -1.

» *Supposons que les constantes h_1, h_2, h_3 soient nulles, hypothèse qui répond au problème où les efforts sur la frontière de l'ellipsoïde sont donnés.*

» Voici, dans ce cas, les résultats relatifs aux polynomes des trois premiers degrés.

» Le système de polynomes du premier degré est

$$U = Ax, \qquad V = Ay, \qquad W = Az,$$

où A est une constante arbitraire, *et la valeur correspondante de k est $\frac{1}{3}$.*

» Les trois systèmes de polynomes du second degré sont donnés respectivement par trois systèmes de formules tels que le suivant :

$$U = A(x^2 - y^2 - z^2), \qquad V = 2Axy, \qquad W = 2Azx,$$

A étant une constante arbitraire; *les valeurs correspondantes de k sont encore égales à $\frac{1}{3}$.*

» Les cinq systèmes de polynomes du troisième degré se partagent en deux groupes.

» Un premier groupe contient la solution définie par les formules

$$U = Akxyz,$$

$$V = Az\left[-\frac{k}{2}x^2 - \frac{k-1}{4}\left(y^2 - \frac{1}{3}z^2\right) + \frac{k\left(x^2 - \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{2}c^2\right)}{c^2\left(\frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}\right],$$

$$W = Ay\left[-\frac{k}{2}x^2 - \frac{k-1}{4}\left(z^2 - \frac{1}{3}y^2\right) + \frac{k\left(x^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{2}b^2\right)}{b^2\left(\frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}\right],$$

et deux solutions analogues; les valeurs correspondantes de k sont données par trois formules telles que la suivante :

$$k = \frac{1}{3 + \dfrac{4a^2}{b^2c^2\left(\frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)}}.$$

» Les solutions du second groupe ont des expressions trop longues pour figurer dans cette Note; nous observerons qu'elles conduisent immédiatement aux résultats particuliers obtenus par M. Chree [1] en 1895, et nous nous bornerons à donner les indications suivantes. Posons

$$H_a = -\frac{8k}{3k-1}\frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^2}\left(\frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{3}{c^2}\right);$$

avec des formules analogues pour H_b, H_c obtenues par permutation circulaire de a, b, c, et

$$K_a = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{3}{c^2}\right) & \frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{3}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \\ \frac{1}{b^2} & H_b & \frac{1}{a^2}\left(\frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \\ \frac{1}{c^2} & \frac{1}{a^2}\left(\frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) & H_c \end{vmatrix}$$

---

(1) C. Chree, *The equilibrium of an isotropic elastic solid ellipsoïd under the action of normal surface forces of the second degree and bodily forces derived from a potential of the second degree* (*Quarterly Journal*, vol. XXVII, p. 338-353; 1895).

avec des formules analogues pour K_b, K_c obtenues également par permutation circulaire de a, b, c. Les valeurs de k correspondant aux solutions du second groupe sont les racines de l'équation du second degré

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{3}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)K_a+\frac{1}{b^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{3}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)K_b+\frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{3}{c^2}\right)K_c=0.$$

Les six composantes de l'effort en un point de l'ellipsoïde sont données par des formules telles que les suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_1 = -A\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)&\left[\frac{1}{b^2}(K_a+K_b-K_c)+\frac{1}{c^2}(K_a-K_b+K_c)\right]\\ &-2A\frac{y^2}{b^4}(K_a+K_b-K_c)-2A\frac{z^2}{c^4}(K_a-K_b+K_c),\end{aligned}$$

$$\mathcal{T}_1 = \frac{2A}{b^2c^2}(-K_a+K_b+K_c)yz.$$

» La méthode précédente suivant laquelle nous déterminons successivement les nombres k_i et les fonctions U_i, V_i, W_i qui leur sont associées, de façon à vérifier les (1) et les (2), conduit d'une manière naturelle, dans le cas de l'ellipsoïde, à la notion des données telles que la solution des équations de l'élasticité soit formée de trois fonctions rationnelles de ξ. Nous aurons prochainement l'occasion de montrer, dans le cas général, l'intérêt que peuvent présenter de telles données. »

ÉLASTICITÉ. — *Vérification de la relation qui existe entre l'angle caractéristique de la déformation des métaux et le coefficient de restitution de leur élasticité.* Note de M. G. Gravaris.

« Dans une Note que j'ai eu l'honneur de soumettre au jugement de l'Académie, j'ai été conduit à admettre comme probable que l'action d'un effort d'extension ou de compression fait naître, chez les corps imparfaitement élastiques, deux ondes longitudinales, non superposables, et deux autres transversales, également distinctes. Qu'il me soit permis de vérifier cette conclusion par les considérations suivantes :

» Le son se propageant le long d'un cylindre au moyen de vibrations longitudinales, la valeur A, mesurée directement, de sa vitesse de propagation, doit être à celle B, qu'on trouve par une des méthodes indirectes, comme $\sin\alpha$ à 1. Dans le cas des fluides, l'angle α a très approximative-

ment la valeur $\frac{\pi}{2}$, et les deux quantités A et B sont généralement égales. Dans le cas des solides, il n'existe que les mesures directes de Biot, lesquelles ont donné, pour un tuyau en fonte de fer et une température de 11°, l'équation

$$\frac{951,2}{V} - \frac{951,2}{A} = 2,5.$$

» Si, d'après les résultats obtenus par Regnault, on prend pour la vitesse de propagation du son dans l'air du tuyau $V = 338^m$, on tirerait de cette équation $A = 3029^m$. Le coefficient d'élasticité de la fonte n'est pas bien connu. La valeur la plus vraisemblable paraît en être 12×10^9, trouvée par Tredgold ([1]) au moyen d'expériences de flexion; celles-ci ont en effet donné, pour les coefficients d'élasticité du fer et de l'acier, des valeurs assez approchées de celles qu'ont fournies, pour ces derniers métaux, les expériences de Wertheim et celles de M. Amagat. Avec cette valeur et pour une densité de 7,4, on trouverait $B = 3999^m$. Par conséquent, $\alpha = 49°39'$: valeur probablement un peu trop faible, mais qui, vu l'incertitude des données numériques, peut être invoquée, je crois, à l'appui des considérations qui l'ont fait naître.

» D'après les mêmes considérations, l'imperfection de l'élasticité ne fait que décomposer la réaction élastique produite par la vibration d'une molécule, en une force de tension et une autre de pression, dont le rapport à leur résultante est respectivement égal à $\sin^2\alpha$ et $\cos^2\alpha$. Par conséquent, que le corps soit ou non parfaitement élastique, l'augmentation de l'unité de son volume, toutes choses égales d'ailleurs, doit être dans les deux cas la même. Comme, d'autre part, le coefficient de Poisson a la valeur $\frac{1}{4}$, pour un solide parfaitement élastique, j'aurai

$$\mu \sin^2\alpha = \frac{1}{4}. \tag{1'}$$

» J'ai comparé, dans le Tableau suivant, aux valeurs de μ trouvées expérimentalement par M. Amagat, celles que donne la relation (1') pour quatre substances dont la valeur de l'angle α est connue.

([1]) Poncelet, *Introduction à la Mécanique industrielle*, p. 383; 1870.

Substance.	Valeur de l'angle α.	de μ calculée.	de μ trouvée par M. Amagat.
Verre...........	84°	0,2528	0,2451
Acier...........	63	0,3149	0,2686
Cuivre	62	0,3207	0,3270
Plomb...........	53	0,3920	0,4282

PHYSICO-CHIMIE. — *Sur la couleur des ions*. Note de M. G. VAILLANT, présentée par M. J. Violle.

« La théorie des ions, appliquée à la coloration des solutions, entraîne les conséquences évidentes suivantes :

» 1° Dans des solutions complètement dissociées, ne contenant qu'un ion coloré, la coloration est indépendante de la nature de l'autre ion;

» 2° Si, au contraire, l'ionisation est incomplète, la coloration varie avec la concentration et la nature de l'ion non coloré;

» 3° La coloration d'une solution de concentration quelconque doit, dans le cas le plus ordinaire, se relier à son degré de dissociation par une formule à deux modules, et deux seulement, caractérisant l'un la molécule complète, l'autre la molécule dissociée.

» Ce sont ces trois propositions qu'on s'est proposé de vérifier. Les mesures ont été faites au spectrophotomètre Gouy et sur les permanganates de K, Ba et Zn. La même cuve à absorption a servi à toutes les déterminations.

» 1° Si un faisceau homogène I_λ traverse une épaisseur l d'une solution complètement dissociée de permanganate renfermant n équivalents-grammes par litre, son intensité prend la valeur

$$i_\lambda = I_\lambda e^{-nla_\lambda},$$

a_λ étant un facteur caractéristique de l'ion MnO^4 et de la radiation λ, indépendant de la nature du permanganate considéré.

» L'équation précédente, qu'on peut écrire

$$\log i_\lambda = \log I_\lambda - nla_\lambda,$$

représente une droite en coordonnées $\log i_\lambda$ et n, à condition que l reste constant.

» Ce fait géométrique a été vérifié sur les quatre radiations

$$\lambda_1 = 0^\mu,570, \quad \lambda_2 = 0^\mu,551, \quad \lambda_3 = 0^\mu,535, \quad \lambda_4 = 0^\mu,521$$

d'après les résultats fournis par 18 solutions, 6 de chacun des trois permanganates, de concentrations comprises entre $\frac{1}{1500}$ et $\frac{1}{3000}$. Les écarts n'ont jamais dépassé la limite des erreurs photométriques, c'est-à-dire $\frac{1}{50}$ environ.

» Pour avoir avec plus de précision le coefficient angulaire des droites précédentes, et comme second mode de vérification, on a fait sur 6 solutions, 2 de chaque permanganate, de nouvelles mesures dont chacune représente la moyenne de 20 observations, et l'on a déterminé pour chacun des trois sels la valeur du quotient

$$q_\lambda = \frac{\log i'_\lambda - \log i_\lambda}{n - n'}.$$

» Dans cette nouvelle série de déterminations, les $\log i$ étaient obtenus à $\frac{1}{100}$ près, ce qui entraînait sur q une erreur relative de $\frac{1}{10}$ environ. Or les valeurs de q sont 3 à 3 égales à ce degré d'approximation, comme le montre le Tableau suivant :

		$Q\lambda_1$.	$Q\lambda_2$.	$Q\lambda_3$.	$Q\lambda_4$.
MnO^4 — K	K..............	1010	1630	1900	2100
	Ba $\frac{1}{2}$.............	1090	1660	1900	2200
	Zn $\frac{1}{2}$.............	1070	1650	1940	2180

» 2° Soient deux solutions d'un même permanganate, de même concentration n, l'une 1 complètement dissociée, l'autre 2 dont on a rendu l'ionisation incomplète en la mélangeant d'une quantité considérable du sulfate ou du nitrate de même cathion. En faisant traverser successivement au même faisceau I_λ ces deux solutions, sous la même épaisseur l, on devra avoir à la sortie

pour 1.......... $\log i_{1\lambda} = \log I_\lambda - nla_\lambda$
et pour 2.......... $\log i_{2\lambda} = \log I_\lambda - nl[a_\lambda \delta + b_\lambda (1 - \delta)]$,

δ étant le degré de dissociation de 2, et b_λ un facteur caractéristique de λ et de la molécule de permanganate étudiée. De ces deux relations on tire

$$D_\lambda = \log i_{2\lambda} - \log i_{1\lambda} = nl(a - b)(1 - \delta).$$

» On a déterminé les valeurs de D_λ pour les quatre radiations

$$\lambda'_1 = 0^\mu,554, \quad \lambda'_2 = 0^\mu,546, \quad \lambda'_3 = 0^\mu,537, \quad \lambda'_4 = 0^\mu,530.$$

Ces valeurs sont restées faibles et, sauf pour $(MnO^4)Zn\frac{1}{2}$ de l'ordre des erreurs d'expérience. Elles n'acquièrent une certaine valeur de conclusion que par la constance de leur sens dans plusieurs séries de déterminations.

» Si l'on prend d'ailleurs pour unités les valeurs moyennes de $D\lambda'_2$, on trouve pour les valeurs moyennes de $D\lambda'_1$, $D\lambda'_3$, $D\lambda'_4$ les nombres suivants :

	$D\lambda'_1$.	$D\lambda'_2$.	$D\lambda'_3$.	$D\lambda'_4$.
K...............	— 0,4	1	0,6	0,6
Ba..............	+ 0,4	1	0,8	0,5
Zn..............	+ 0,2	1	0,9	0,6

qui semblent bien témoigner d'une différence de coloration entre les trois molécules de permanganates.

» 3° Si l'on fait varier l'état d'ionisation de la solution 2, en modifiant la quantité de sel étranger ajoutée, les quantités D relatives à diverses radiations doivent varier dans le même rapport.

» Les quantités D relatives aux sels étudiés sont trop faibles pour qu'on puisse faire cette dernière vérification d'une façon précise. Toutefois, en comparant, à une solution aqueuse 1 de $MnO^4Zn^{\frac{1}{2}}$, trois solutions 2, 3, 4 de même concentration et mélangées de quantités variables de sulfate, on a obtenu le résultat assez concluant suivant :

Solutions......	2	3	4
$\frac{D\lambda'_2}{D\lambda'_3}$..........	1,10	1,11	1,11

CHIMIE. — *Sur la valeur des poids moléculaires à la température de l'ébullition.* Note de M. de Forcrand.

« J'ai énoncé, il y a quelques mois [1], la loi générale suivante : *Dans tous les phénomènes physiques ou chimiques, la chaleur de solidification d'une molécule d'un gaz quelconque est proportionnelle à sa température (absolue) d'ébullition sous la pression atmosphérique.* Ce que l'on peut exprimer ainsi :

$$\frac{L+S}{T} = \frac{L+S+q}{T'} = K = 30$$

avec une erreur possible de $\frac{1}{15}$ en plus ou en moins.

» Je donnerai prochainement, pour le cas de l'ammoniac et des sels métalliques ammoniacaux, une démonstration précise de cette loi, qui

(1) *Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 879.

n'est qu'une modification de celle de Trouton et de l'énoncé de M. Le Chatelier. La présente Note a seulement pour objet d'indiquer une des conséquences de cette relation générale.

» I. Remarquons en effet que, dans les formules précédentes, les termes L et S expriment (en petites calories) les chaleurs de liquéfaction et de solidification d'une molécule d'un gaz simple ou composé, en adoptant pour ce gaz le poids moléculaire généralement admis.

» Mais en réalité l'expérience donne seulement ces chaleurs de liquéfaction et de solidification pour l'unité de poids. Soient l et s ces quantités rapportées à 1^{gr} de matière. On aura :

$$\frac{(l+s)M}{T} = 30,$$

M étant le poids moléculaire supposé inconnu. De là, un moyen de calculer (lorsqu'il est incertain) le poids moléculaire à la température T.

» II. *Applications.* — Il est évident que, pour les quatorze corps simples ou composés qui m'ont servi à établir la relation générale, on trouvera pour M des nombres qui concordent à $\frac{1}{15}$ près avec les valeurs ordinaires. Je citerai seulement le brome, l'acide acétique et l'iode.

» Pour le brome

$$l+s = 60^{cal}, \qquad T = 332^{\circ},$$

$$M = \frac{332 \times 30}{60} = 166 \qquad \text{soit} \qquad Br^{2,07}.$$

» Pour l'acide acétique

$$l+s = 120^{cal},9, \qquad M = 97,02 \qquad \text{soit} \qquad (C^2H^4O^2)^{1,61},$$

ce qui est bien la condensation admise d'après la densité de vapeur. Aussi, pour obtenir $\frac{L+S}{T} = 30$, j'avais dû corriger la valeur de L d'après la densité de vapeur, comme Trouton l'avait fait avant moi pour établir sa relation.

» Pour l'iode, on ne trouve un rapport voisin de 30 qu'en admettant que la chaleur de volatilisation, 6083^{cal}, déterminée par Favre et Silbermann, est beaucoup trop faible, et la portant à 9000^{cal} comme le propose M. Berthelot dans sa *Thermochimie*.

» Cherchons cependant, en admettant une relation générale, quel poids moléculaire on obtiendrait pour l'iode en conservant la donnée expéri-

mentale 6083^{cal}. On a

$$l + s = 35^{cal},35, \qquad M = 381,04 \quad \text{soit} \quad I^3.$$

» Or, les plus récentes déterminations du poids moléculaire de l'iode à température relativement basse, notamment celles de MM. Oddo et Serra (ébullioscopie dans CCl^5), ont donné des valeurs comprises entre I^2 et I^4 suivant la concentration. Il ne me paraît donc pas absolument nécessaire de rejeter le nombre de Favre et Silbermann.

» Examinons maintenant d'autres corps simples ou composés (1) :

» *Mercure :* $L + S = 15960^{cal}$, $l + s = 79^{cal},80$,

$$M = 237^{cal} \quad \text{soit} \quad Hg^{1,18};$$

même en tenant compte de l'incertitude de $\frac{1}{15}$ que comporte ma relation, on aurait encore au moins $M = 220$, soit $Hg^{1,1}$. Le mercure, au *point d'ébullition normal* (+ 357° C.), ne serait donc pas formé uniquement par des molécules monoatomiques.

» *Soufre.* — Ce cas est particulièrement intéressant, à cause de ce que l'on sait déjà sur la polymérisation de cet élément.

$$L + S = 5200^{cal} \text{ pour } 64^{gr}, \qquad l + s = 81^{cal},25 \text{ pour } 1^{gr}$$

d'où

$$M = 266,1 \quad \text{soit} \quad S^{8,31}$$

ou plus exactement, en tenant compte de l'incertitude de $\frac{1}{15}$: de $S^{7,76}$ à $S^{8,86}$.

» Or ces nombres sont tout à fait d'accord avec les plus récents travaux sur la condensation du soufre. Ainsi à 468° M. Biltz a trouvé, par la densité de vapeur, $S^{7,2}$, d'autres auteurs S^8, par ébullioscopie et cryoscopie l'on a obtenu plusieurs fois S^8 et S^9.

» *Acide azotique :* $L + S = 7850^{cal}$ pour 63^{gr}, $l + s = 124^{cal},5$ pour 1^{gr},

d'où

$$M = 86,44 \quad \text{soit} \quad (AzO^3H)^{1,37};$$

la molécule serait donc en partie condensée au point d'ébullition, mais à un degré moindre que l'acide acétique.

» *Anhydride azotique.* — Ce cas est tout à fait spécial. On a en effet :

$$L = 4840^{cal}, \qquad S = 8280^{cal}, \qquad L + S = 13120^{cal} \text{ pour } 108^{gr};$$

par conséquent $l + s = 121^{cal},5$ pour 1^{gr}, d'où $M = 79,75$, soit (Az^2O^5) 0,74.

---

(1) Il n'existe qu'un très petit nombre de corps pour lesquels on connaît $l + s$. Je n'ai pu en découvrir qu'une vingtaine.

» Le poids de la molécule ne serait donc que les trois quarts du poids normal 108. Cependant les détails que donne M. Berthelot dans son Mémoire (¹) ne permettent pas de supposer une décomposition de Az^2O^5 en $2\,AzO^2 + O$ pendant la volatilisation, comme il serait naturel de le penser. D'ailleurs ce n'est pas la valeur de L qui paraît exagérée, mais bien celle de S. Celle-ci est presque le double de la première, tandis que, pour tous les autres corps, S est plus petit que L. Il faut donc admettre que la solidification de Az^2O^5 liquide est accompagnée d'un phénomène anormal très exothermique, sans doute une polymérisation.

» A part ce dernier exemple, tout à fait particulier, on voit, par l'accord qui existe entre les résultats obtenus et les données déjà publiées, que la relation que j'ai énoncée permet de calculer M à la température T, résultat que les méthodes actuelles ne peuvent atteindre.

» J'étudierai prochainement le cas de certains composés dissociables, et aussi le problème inverse : détermination de $l + s$ lorsque l'on connaît M. »

CHIMIE ORGANIQUE. — *Action du chlorure de benzoyle sur le trioxyméthylène, en présence de chlorure de zinc.* Note de M. **Marcel Descudé**.

« Dans une précédente Communication (²), j'ai montré que le chlorure de zinc facilite considérablement l'union du chlorure d'acétyle avec les aldéhydes méthylique et éthylique.

» Etudiant ensuite l'action du chlorure de benzoyle sur le trioxyméthylène, j'ai signalé la formation d'un composé répondant à la formule $C^{14}H^{12}O^4$. J'ai reconnu, depuis, que cette formule est inexacte et doit être remplacée par la suivante : $C^{15}H^{12}O^4$, qui représente la composition du *dibenzoate de méthylène*

$$\begin{matrix} C^5H^5 - COO \\ C^6H^5 - COO \end{matrix} \Big> CH^2$$

» J'ai donc été amené à essayer de combiner directement l'anhydride benzoïque et le méthanal.

» Dans ce but, j'ai chauffé un mélange de trioxyméthylène et d'anhydride benzoïque ; ce dernier se liquéfie, tandis que le trioxyméthylène reste inattaqué ; mais si l'on vient à introduire une petite quantité de chlorure de zinc et qu'on continue à

(¹) *Ann. de Chim. et de Phys.*, 5ᵉ série, t. VI, p. 172.
(²) *Comptes rendus*, 24 juin 1901.

chauffer, on voit le trioxyméthylène se dissoudre peu à peu. Par le refroidissement, le tout cristallise, et, si l'on reprend la masse par une *petite quantité* d'alcool bouillant, il se dépose, après filtration et refroidissement, des cristaux identiques, comme composition, à ceux qui ont été décrits plus haut.

» Je me suis, dès lors, attaché à préparer une quantité suffisante de ce produit pour étudier ses propriétés.

» En distillant sous la pression ordinaire, on n'obtient que très peu de dibenzoate de méthylène. Il en est tout autrement si l'on opère sous pression réduite. Ayant dissous 15^{gr} de trioxyméthylène dans 55^{gr} de chlorure de benzoyle, j'ai opéré la distillation sous une pression de 2^{cm} de mercure. Le thermomètre s'est fixé à 118°, tandis qu'une certaine quantité d'un liquide incolore passait à la distillation. Le thermomètre s'étant mis ensuite à baisser, j'ai laissé refroidir le contenu du ballon distillatoire, qui s'est bientôt pris en une masse de cristaux presque exclusivement formés de dibenzoate de méthylène (30^{gr}).

» Quant au chlorobenzoate de méthylène, je n'ai pas pu l'isoler à l'état de pureté. Toutefois il est bien certain que c'est le composé qui prend d'abord naissance, ainsi que l'indiquait récemment M. Louis Henry, et il est très probable que c'est grâce à une réaction secondaire, attribuable à la présence de l'eau, que se forme le dibenzoate :

$$\left.\begin{matrix} C^6H^5-CO\,O \\ Cl \end{matrix}\right\rangle CH^2 + C^6H^5-CO\,OH = H\,Cl + \left.\begin{matrix} C^6H^5-CO\,O \\ C^6H^5-CO\,O \end{matrix}\right\rangle CH^2.$$

» J'ai effectué cette même réaction directement, en chauffant ensemble un mélange de trioxyméthylène, de chlorure de benzoyle et de benzoate de potassium, avec un peu de chlorure de zinc, et j'ai obtenu une assez forte proportion de dibenzoate.

» *Propriétés du dibenzoate de méthylène.* — C'est un corps remarquable par la facilité avec laquelle il cristallise, par évaporation lente de ses solutions, et en particulier de sa solution dans l'éther. On peut ainsi obtenir de très gros cristaux incolores, limpides et dérivant d'un prisme *clinorhombique*. Les arêtes sont presque normales aux bases, ce qui m'avait fait croire d'abord au système *orthorhombique*, comme je le signalais, *à tort*, dernièrement :

Angle de la base avec les faces .... { 94°38′ / 85°22′ }

Angles des faces entre elles..................... { 49°29′ / 130°31′ }

» Presque toujours on distingue de nombreuses facettes sur les arêtes et sur les angles; cependant j'ai pu obtenir un prisme sans troncatures appréciables et mesurant 3^{cm} de longueur, sur $1^{cm},5$ de largeur.

» Ce corps est très biréfringent. En outre il est biaxe.

» *Solubilité.* — Elle a été déterminée dans les principaux dissolvants et voici les nombres approximatifs que j'ai obtenus pour la quantité de corps dissous dans 100^{gr} de dissolvant à la température de 24° :

Eau.	Alcool absolu.	Éther anhydre.	Acétone.	Benzène.
0	2,5	8	18	27

» *Fusion.* — Ce corps fond à 99°, en un liquide limpide, incolore, qui entre en ébullition vers 255° en se décomposant très légèrement. Mais si l'on élève la température, la décomposition devient assez rapide et du trioxyméthylène se condense sur les parois froides.

» Au bout d'un certain temps de chauffe, le produit ne se solidifie plus par le refroidissement; on a alors un liquide distillant au-dessus de 300°, que je n'ai pas encore analysé et qui, traité par l'acide azotique, se transforme en acide benzoïque.

» *Densité.* — Elle a pour valeur 1,275 à 22°.

» Quant à l'étude des propriétés chimiques, je l'ai à peine commencée. Je signalerai seulement la grande résistance qu'offre ce corps aux divers réactifs, même les plus énergiques, me réservant de poursuivre cette étude et d'en faire connaître les résultats ultérieurement. »

MÉTÉOROLOGIE. — *Méthode électro-sonore pour combattre la grêle.* Note de M. G.-M. Stanoiéwitch, présentée par M. Janssen. (Extrait.)

« Il paraît démontré que les perturbations de l'état moléculaire d'un nuage à grêle, produites par une ou plusieurs ondulations, peuvent empêcher la formation de la grêle. Ces perturbations sont produites par des tores gazeux, envoyés dans le nuage par des tirs de canons grandinifuges. D'après les recherches de MM. Pernter, Directeur de l'Observatoire météorologique de Vienne, et Trabert ([1]), la hauteur du projectile gazeux, dans les cas les plus favorables, ne dépasserait pas 400^m.

» Il s'ensuit que le dérangement de l'état d'équilibre dans le nuage peut être produit quand la hauteur du nuage ne dépasse pas 400^m ou 500^m et que, dans les cas où les nuages à grêle sont plus élevés, l'action du tir est plus ou moins sans résultat. Par ce fait, entre autres, on peut expliquer les résultats contradictoires présentés au Congrès de Padoue, les 25 et 27 novembre 1900. En effet, dans le cas des orages d'une violence exceptionnelle, les nuages à grêle, venant de loin, sont ordinairement très élevés et le tir ne peut avoir sur eux qu'une action très faible ou nulle.

» Le tore gazeux, envoyé de la surface de la terre, arrive dans le nuage quand il est déjà presque au bout de ses forces, et ses effets ne peuvent pas être considérables, au moins dans beaucoup de cas. Il nous semble préférable de provoquer une forte vibration aérienne dans les hauteurs, de

([1]) Pernter et Trabert, *Untersuchungen über das Wetterschiessen.* Vienne, 1900.

placer la source qui produit les perturbations dans le sein même du nuage ou à peu près. Pour cela, il faudrait attacher, soit à un cerf-volant (semblable à ceux qui sont employés dans la météorologie moderne pour le sondage de l'air), soit à un petit ballon captif, une forte sonnerie ou sirène électrique, à son grave ou aigu, et produire dans le nuage lui-même des vibrations aériennes beaucoup plus fortes que celles qui sont apportées par les tores. En pouvant changer à volonté la hauteur du ballon, on se placera toujours dans les meilleures conditions. Le ballon ou cerf-volant sera attaché par un fil d'acier, accompagné de deux fils de cuivre ou d'aluminium isolés, qui conduiront le courant d'une batterie placée sur le sol. On pourra aussi faire monter la batterie, si la force ascensionnelle du ballon est assez grande.... »

M. E. Vial, M. A. Girard, M. Ch. Sibillot adressent diverses Communications relatives à l'aviation et aux aérostats.

(Renvoi à la Commission des Aérostats, Commission qui se compose de MM. Faye, Cornu, Marey, Deprez, Léauté.)

La séance est levée à 3 heures trois quarts.

G. D.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ouvrages reçus dans la séance du 12 aout 1901.

Mémoires de la Société nationale d'Agriculture, Sciences et Arts d'Angers. Cinquième série. Tome III, année 1900, Angers, Lachèse et Cie, 1901; 1 vol. in-8°.

Results of Meridian observations made at the Royal Observatory, Cape of Good Hope 1866 *to* 1870. Direction of sir Thomas Maclear. Edinburgh, printed for Her Majesty's stationery Office by Neill and Company, limited, 1900; 1 vol. in-8°.

Catalogue of 1905 *stars for the equinox* 1865.0 *from observations made at the Royal Observatory, Cape of Good Hope* 1861 *to* 1870. London, printed for Her Majesty's stationery Office, 1899; 1 vol. in-8°.

American Journal of Mathematics; edited by Frank Morley. Vol. XXIII, number 2. Baltimore, The Johns Hopkins Press, 1901; 1 vol. in-4°.

Annals of the Royal Observatory, Cape of Good Hope. Vol. VIII, part II. Edinburgh, printed for Her Majesty's stationery Office, 1900; 1 vol. in-4°.

A descriptive Catalogue of the Indian Deep-Sea, crustacea decapoda, macrura and anomala, in the Indian Museum, by A. Alcock. Calcutta, printed by order of the Trustees of the Indian Museum, 1901; 1 vol. in-4°.

Astronomical, magnetical and meteorological observations made at the Royal Observatory, Greenwich, 1898. Direction of W.-H.-M. Christie. Edinburgh, by Neill and C° limited, 1900; 1 vol. in-4°.

Annales of the Cape Observatory. Vol. V, by Neill and C° limited, 1900; 1 vol. in-4°.

Second ten-year Catalogue of 6892 *stars for* 1890.0, *Royal Observatory, Greenwich.* Edinburgh, by Neill and C° limited, 1900; 1 vol. in-4°.

Spectroscopic and photographic results, Royal Observatory, Greenwich, 1898. Edinburgh, by Neill and C° limited, 1899; 1 vol. in-4°.

The University of Missouri Studies; edited by Frank Thilly. *Contributions to a psychological theory of music,* by Max Meyer. Vol. I, number 1. Published by the University of Missouri, 1901; 1 vol. in-8°.